

## Théorème de la médiane — résumé complet

Contexte général : I est le milieu de [AB]. M est un point quelconque du plan (pas besoin d'un triangle).

---

### 1. Forme vectorielle (la plus fondamentale)

$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$$

C'est simplement la définition du milieu vue depuis M. Toutes les autres formes en découlent.

---

### 2. Forme "somme des carrés" (la plus connue)

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

- Valable pour tout M, aligné ou non avec A et B.
- Cas particulier  $M=I$  :  $IA^2 + IB^2 = 2 \cdot 0 + \frac{AB^2}{2}$ , cohérent car  $IA = IB = AB/2$ .

Utilisation typique (triangle) : si A, B, M sont les sommets d'un triangle et I le milieu de [AB], alors MI est la **médiane** issue de M. On peut donc écrire, avec  $a = BM$ ,  $b = AM$ ,  $c = AB$  :

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

(formule de la longueur de la médiane, à adapter selon le sommet choisi).

---

### 3. Forme "différence des carrés" (variante utile)

$$MA^2 - MB^2 = 2\vec{IM} \cdot \vec{BA} = 2\vec{AB} \cdot \vec{IM}$$

Cette version sert souvent à caractériser des **lieux géométriques** : l'ensemble des points M tels que  $MA^2 - MB^2 = k$  (constante) est une droite perpendiculaire à (AB).

---

### 4. Forme avec produit scalaire (identité de polarisation)

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

## Théorème de la médiane appliqué dans un triangle

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC].

Alors

- $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$
- $AB^2 - AC^2 = 2\vec{BC} \cdot \vec{IA}$

