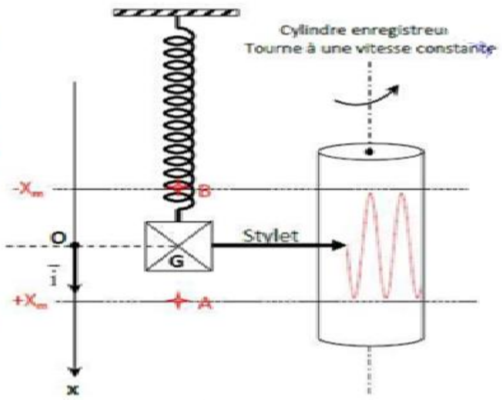
1For1 *Ilehi hammadi*

Mouvement sinusoïdale

1) Oscillations d'un pendule élastique

On écarte le solide de sa position d'équilibre verticalement de X_m et on le lâche sans vitesse initiale, son centre d'inertie G se met à osciller entre les deux positions d'abscisses $+X_m$ et $-X_m$.
Soit x(t) l'abscisse de G à un instant t quelconque, l'enregistrement graphique montre que x(t) varie sinusoïdalement entre $-X_m$ et $+X_m$, au cours du temps : **Le mouvement de G est dit alors rectiligne sinusoïdal.**



2) Définitions

Un point mobile est en mouvement rectiligne sinusoïdal si :

- sa trajectoire est un segment de droite [AB] de milieu O,
- dans le repère $(O,\vec{i})$ d'origine O et porté par la trajectoire, son abscisse x(t) (ou **élongation instantanée**) est une fonction sinusoïdale de la forme : $x(t) = X_m \sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_x)$

C'est l'équation horaire d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.

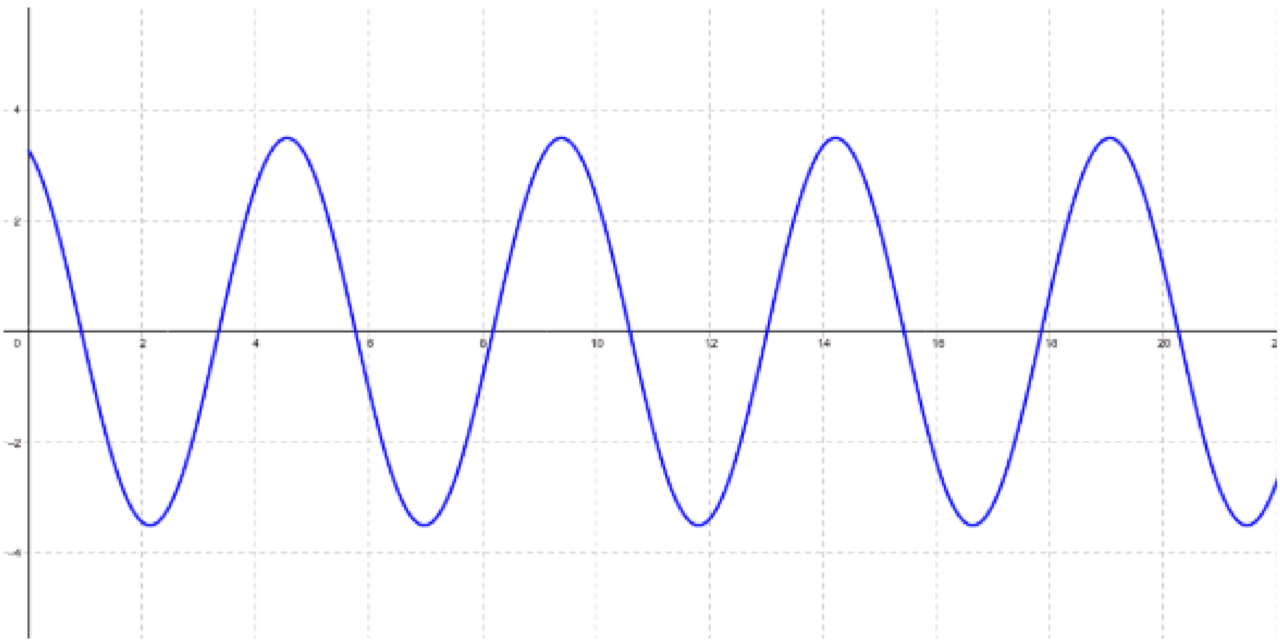
- X_m est l'**amplitude du mouvement** ou l'**élongation maximale** elle s'exprime en mètre (**m**).
- Ce mouvement est dit **périodique**, car il se répète identique à lui-même à des intervalles de temps égaux.

La valeur commune à ces intervalles de temps est la **période T** du mouvement.
Pendant une période le point mobile effectue une **oscillation**.
T s'exprime en **seconde** (**s**) et elle se mesure à l'aide d'un chronomètre.

- La **fréquence N** : $N = \frac{1}{T}$

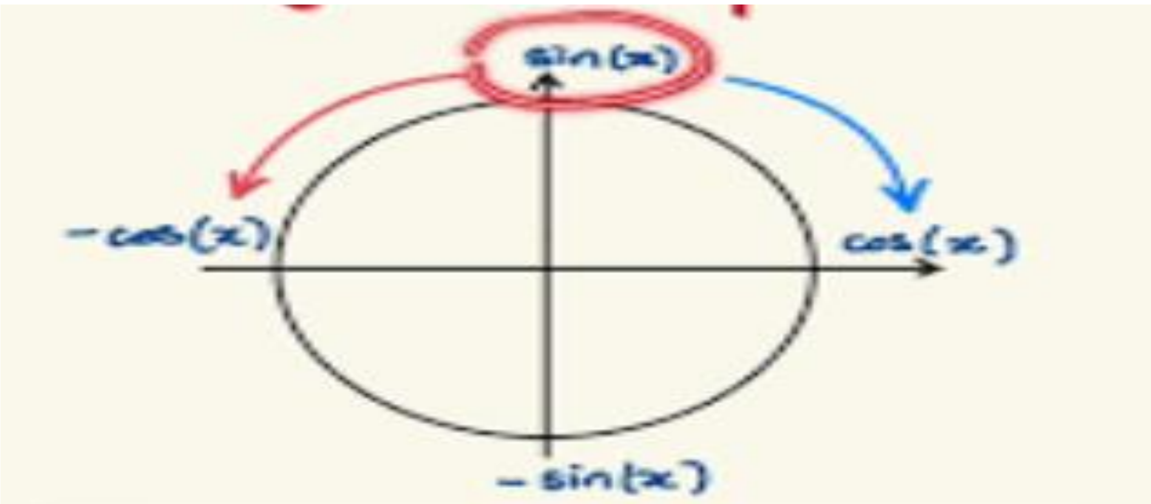
Elle correspond au nombre d'oscillations effectuées en une seconde ; l'unité est le **Hertz** (**Hz**).

- La **pulsation du mouvement ω** : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ elle s'exprime en **rad.s⁻¹**.
- φ_x est la **phase initiale** ou la **phase à l'instant t = 0** elle s'exprime en **rad**.
- $(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_x)$ est la **phase à l'instant t** et s'exprime en **rad**.



3éme info

Rappel mathematique



$f(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f'(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$

Structure de la fonction	Structure de la dérivée
$\sin u$	$u'\cos u$
$\cos u$	$-u'\sin u$

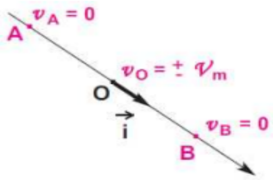
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3) Grandeurs cinématiques

a) Vecteur position

Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x(t).\vec{i}$ avec $x(t) = X_m \sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_x)$

b) Vecteur vitesse instantanée



Le vecteur vitesse instantanée s'écrit : $\vec{\mathcal{V}}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} = \mathcal{V}(t)\,\vec{i}$

$\mathcal{V}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = X_m \frac{2\pi}{T}\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_x) = X_m \frac{2\pi}{T}\sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_x+\frac{\pi}{2})$ que l'on peut écrire sous la forme :

$\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_m \sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_{\mathcal{V}})$ avec **$\mathcal{V}_m = X_m \frac{2\pi}{T}$** et **$\varphi_{\mathcal{V}} = \varphi_x+\frac{\pi}{2}$**

$\mathcal{V}(t)$ et $\mathcal{V}_m$ s'expriment en **$m.s^{-1}$**.

La vitesse est nulle aux points de rebroussement A et B, par contre elle est maximale en valeur absolue au milieu O telle que $\mathcal{V}_0 = \pm\mathcal{V}_m$; le signe de $\mathcal{V}_0$ dépend du sens dans lequel évolue le mouvement du point mobile.

Relation entre x(t) et $\mathcal{V}(t)$

$$\begin{cases} x(t) = X_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_x\right) \\ \mathcal{V}(t) = X_m \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_x\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = X_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_x\right) & (1) \\ \dfrac{\mathcal{V}(t)}{\frac{2\pi}{T}} = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_x\right) & (2) \end{cases}$$

$(1)^2 + (2)^2$ donne :

$$\boxed{\frac{v^2(t)}{(\frac{2\pi}{T})^2} + x^2(t) = X_m^2}$$

c) Vecteur accélération instantanée

Dans le repère $(O,\vec{i})$ porté par la trajectoire, on peut écrire : $\vec{a} = a(t).\vec{i}$

$a(t) = \frac{d\mathcal{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[X_m \frac{2\pi}{T}\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_x)] = -X_m(\frac{2\pi}{T})^2\sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_x) = -\omega^2 x(t) = \omega^2 X_m \sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_x+\pi)$

L'accélération s'écrit de la forme : **$a(t) = \mathcal{A}_m \sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_a)$**

avec **$\mathcal{A}_m = \omega^2 X_m$** et **$\varphi_a = (\varphi_x + \pi)$** ; $a(t)$ en $m.s^{-2}$

Relation entre x(t) et $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$

$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$ d'où **$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$**

$x(t) = X_m \sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_x)$ est une solution de cette équation.