Correction de devoir de synthèse n°1)   4 Maths

Exercice n°1)

1)a) ABC est isocèle en A donc AB=AC et I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC] donc 2AI=2CJ

Alors $AI = CJ \quad et \quad AI \neq 0$ donc il existe un unique déplacement R tel que R(A)=C et R(I)= J.

b)On a : I le milieu de [AB] et R un déplacement donc il conserve le milieu alors $R(I) = R(A) * R(B) \Leftrightarrow$

$J = C * R(B) = C * A$ alors $R(B) = A$

c) Soit θ l'angle de R on a : $\begin{cases} R(A) = C \\ R(B) = A \end{cases}$ donc $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}})[2\pi]$

$$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) - \pi[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{6} - \pi[2\pi]$$

$$\equiv \frac{-5\pi}{6}[2\pi]$$

On : $\frac{-5\pi}{6} \neq \quad 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$ donc R est une rotation d'angle $\frac{-5\pi}{6}$

Le centre O de R est le point d'intersection des médiatrices des segments [AB] et [AC]

2) ζ est le cercle circonscrit au triangle ABC donc O est centre de ζ et puisque O est le centre de R alors

$R(\zeta) = \zeta$.

On a : $C \in \zeta \Leftrightarrow \mathrm{R(C)} \in R(\zeta) = \zeta \Leftrightarrow \mathrm{D} \in \zeta$

On a : R(A)=C , R(B)=A et R(C)=D et R une rotation donc elle conserve les mesures des angles orientés donc

$$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}})[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

$(\overrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}) \; et \; (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ sont deux angles inscrit dans le cercle ζ qui interceptent le même arc orienté $\widehat{BC}$

Donc $(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}})[2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

(AC) et (BD) deux droites et (DC) une sécante , $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$ et $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ sont deux angles alternes-internes tels que $(\overrightarrow{CA}, \widehat{\ \overrightarrow{CD}}) \equiv (\overrightarrow{DB}, \widehat{\ \overleftrightarrow{DC}})[2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

Alors (AC) et (BD) sont parallèles

3) On a : $(AC) \parallel (BD)$ et R une rotation donc elle conserve le parallélisme alors $R((AC)) \parallel R((BD))$

Alors $(CD) \parallel R((BD))$ donc $R((BD))$ est la droite passant par R(B)=A et parallèle à (DC) c'est la droite (AE)

D'où $R\big((BD)\big) = (AE)$

On a : $\zeta \cap (BD) = \{B, D\}$ alors $R(\zeta) \cap R\big((BD)\big) = \{R(B), R(D)\} \Leftrightarrow \zeta \cap (AE) = \{A, R(D)\}$

Or $\zeta \cap (AE) = \{A, E\}$

Donc $\{A, R(D)\} = \{A, R(D)\}$ $alors\ R(D) = E$

4)a) $R \circ R$ est la rotation de centre O et d'angle $2 \times \frac{-5\pi}{6} = \frac{-5\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$R \circ R = r_{\left(O,\ \frac{\pi}{3}\right)}$

b) On a : R(A)=C et R(C)=D donc $R \circ R(A) = D \Leftrightarrow r_{\left(O,\ \frac{\pi}{3}\right)}(A) = D$

R(C)=D et R(D)=E donc $R \circ R(C) = E \Leftrightarrow r_{\left(O,\ \frac{\pi}{3}\right)}(C) = E$

Alors $r_{\left(O,\ \frac{\pi}{3}\right)}([AC]) = [DE]$ et tel que $\begin{cases} AC = DE \\ (\overrightarrow{AC}, \widehat{\ \overrightarrow{DE}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Posons $r_{\left(O,\ \frac{\pi}{3}\right)}$ (M)=M'

On a : $M \in [AC] \Leftrightarrow r_{\left(O,\ \frac{\pi}{3}\right)}(M) \in [DE] \Leftrightarrow M' \in [DE]$

Et comme $r_{\left(O,\ \frac{\pi}{3}\right)}$ (A)=D alors $\begin{cases} AM = DM' \\ (\overrightarrow{AM}, \widehat{\ \overrightarrow{DM'}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ (1)

Par hypothèse AM=DN et $N \in [DE]$

$(\overrightarrow{AM}, \widehat{\ \overrightarrow{DN}}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \widehat{\ \overrightarrow{DE}})[2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Alors $\begin{cases} AM = DN \\ (\overrightarrow{AM}, \widehat{\ \overrightarrow{DN}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ (2)

D'après (1) et (2) on obtient $\begin{cases} DM' = DN \\ (\overrightarrow{DN}, \widehat{\ \overrightarrow{DM'}}) \equiv 0[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{DM'} = \overrightarrow{DN} \Leftrightarrow M' = N$

D'où $r_{\left(O,\ \frac{\pi}{3}\right)}(M) = N \Leftrightarrow \begin{cases} OM = ON \\ (\overrightarrow{OM}, \widehat{\ \overrightarrow{ON}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow OMN\ \ est\ équilatéral\ \ direct$

5)a) $f = R \circ S_{(AB)}$.

f est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc f est un antidéplacement

Supposant que f est une symétrie orthogonale d'axe Δ

alors $S_\Delta = R \circ S_{(AB)} \Leftrightarrow S_\Delta \circ S_{(AB)} = R$ alors cette décomposition est impossible car le point O centre de R n'appartient pas à (AB) donc f ne peut pas être une symétrie orthogonale et par suite f est une symétrie glissante .

Soit Δ l'axe de f et $\vec{u}$ son vecteur

$f(A) = R \circ S_{(AB)}(A) = R(A) = C$ alors $A * C = J \in \Delta$

$f(B) = R \circ S_{(AB)}(B) = R(B) = A$ alors $A * B = I \in \Delta$

Alors $\Delta = (IJ)$

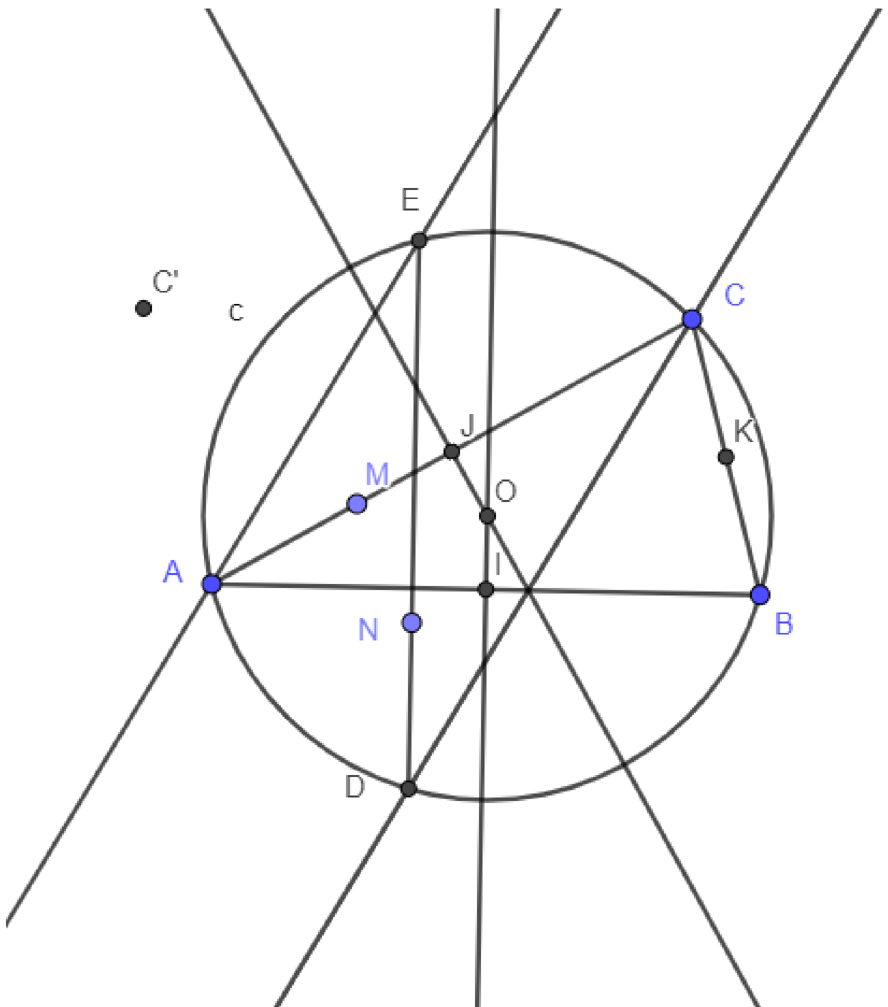
$f \circ f(B) = C \Leftrightarrow t_{2\vec{u}}(B) = C \Leftrightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK}$

D'où $f = t_{\overrightarrow{BK}} \circ S_{(IJ)} = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{BK}}$

$I = A * B$ donc $f(I) = f(A) * f(B) = C * A = J$ donc $f(I) = J$

c) On a : $f \circ f = t_{\overrightarrow{BC}}$

et $f \circ f(A) = C'$, $f \circ f(B) = C$ alors $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$ ABCC' est un parallélogramme.



Exercice n°2)

1) f est une fonction rationnelle définie sur $]-1,+\infty[$ donc f est dérivable

sur $]-1,+\infty[\ \ et\ \ f'(x)=\frac{-3x^2}{(x^3+1)^2}$

$f'(0)=0\ \ et\ \ pour\ tout\ x\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}\ ,\ f'(x)<0$ alors f est strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$

$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{x^3+1}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3+1}=0$

x	-1		0		$+\infty$
f'(x)		−	0	−	
f	$+\infty$	↘			0

2) f est continue et strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur

$f(\ \ ]-1,+\infty[\ \ )=]0,+\infty[$.

Pour tout $x\in]0,+\infty[$ déterminons y unique de $]-1,+\infty[$ tel que $f^{-1}(x)=y$

$$\begin{cases} f^{-1}(x)=y \\ x\in]0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y)=x \\ y\in]-1,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y^3+1}=x \\ y\in]-1,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3=\frac{1-x}{x} \\ y\in]-1,+\infty[\end{cases}$$

Si $x\in]0,1]\ \ alors\ \frac{1-x}{x}\geq 0\ \ donc\ \ y^3=\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$

Si $x\in[1,+\infty[\ \ alors\ \ \frac{1-x}{x}\leq 0\ \ donc\ y^3=\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow(-y)^3=\frac{x-1}{x}\Leftrightarrow -y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}$

$$\Leftrightarrow y=-\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}$$

D'où $f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}} & si\ \ \ x\in]0,1] \\ -\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} & si\ \ x\in[1,+\infty[\end{cases}$

3) $\lim_{x\to1^-}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{x(1-x)^3}}=\lim_{x\to1^-}-\sqrt[3]{\frac{1}{x(1-x)^2}}=-\infty$ donc f^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 1 et la courbe de f^{-1} admet une demi tangente verticale à gauche en 1 dirigée vers le haut

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{-\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} -\sqrt[3]{\frac{x-1}{x(x-1)^3}} = \lim\limits_{x\to 1^-} -\sqrt[3]{\frac{1}{x(x-1)^2}} = -\infty$ donc f^{-1} n'est pas dérivable à droite en 1 et la courbe de f^{-1} admet une demi -tangente verticale à droite en 1 dirigée vers le bas.

Autre méthode :

On a : $f'(0) = 0$ donc la courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 alors par symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation y= x la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse 1

Ceci prouve que f^{-1} n'est pas dérivable en 1.

4)a) Pour tout $x \in]-1,+\infty[, g'(x) = f'(x) - 1 < 0$

Donc g est strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}(f(x) - x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - x) = -\infty$

x	-1	$+\infty$
g'(x)	$-$	
g	$+\infty$ ↘	$-\infty$

b) D'après 4)a) g est continue et strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de

$]-1,+\infty[$ sur $g(]-1,+\infty[\ ) = \mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation g(x)=0 admet une solution unique α , vérifions que $\alpha \in [0,1]$

$g(0) = f(0) = 1 > 0$ et $g(1) = -\frac{1}{2} < 0$ donc $g(0) \times g(1) < 0$ et par suite $\alpha \in [0,1]$

5) a) Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f'(x) = \frac{-3x^2}{(x^3+1)^2}$ donc

$$f''(x) = \frac{-6x(x^3+1)^2 + 3x^2 \times 2 \times 3x^2(x^3+1)}{(x^3+1)^4} = \frac{-6x(x^3+1) + 18x^4}{(x^3+1)^3} = \frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$$

b) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(2x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou\ 2x^3 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow x = 0 \ ou\ x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

x	-1		0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f''(x)		+	0	$-$	0	+	

f'' s'annule et change de signe en 0 et $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ donc la courbe de f admet deux points

d'inflexion $A(0,1)\ et\ \ B\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \frac{2}{3}\right)$

c)

x	-1		0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f''(x)		+	0	$-$	0	+	
f'	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	$\nearrow$	0

Alors pour $x \in [0,1]$, $-\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \leq f'(x) \leq 0$

Or $-\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx -0{,}84$ donc $-\frac{9}{10} \leq -\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ donc pour $x \in [0,1]$, $-\frac{9}{10} \leq f'(x) \leq 0$ et par conséquent

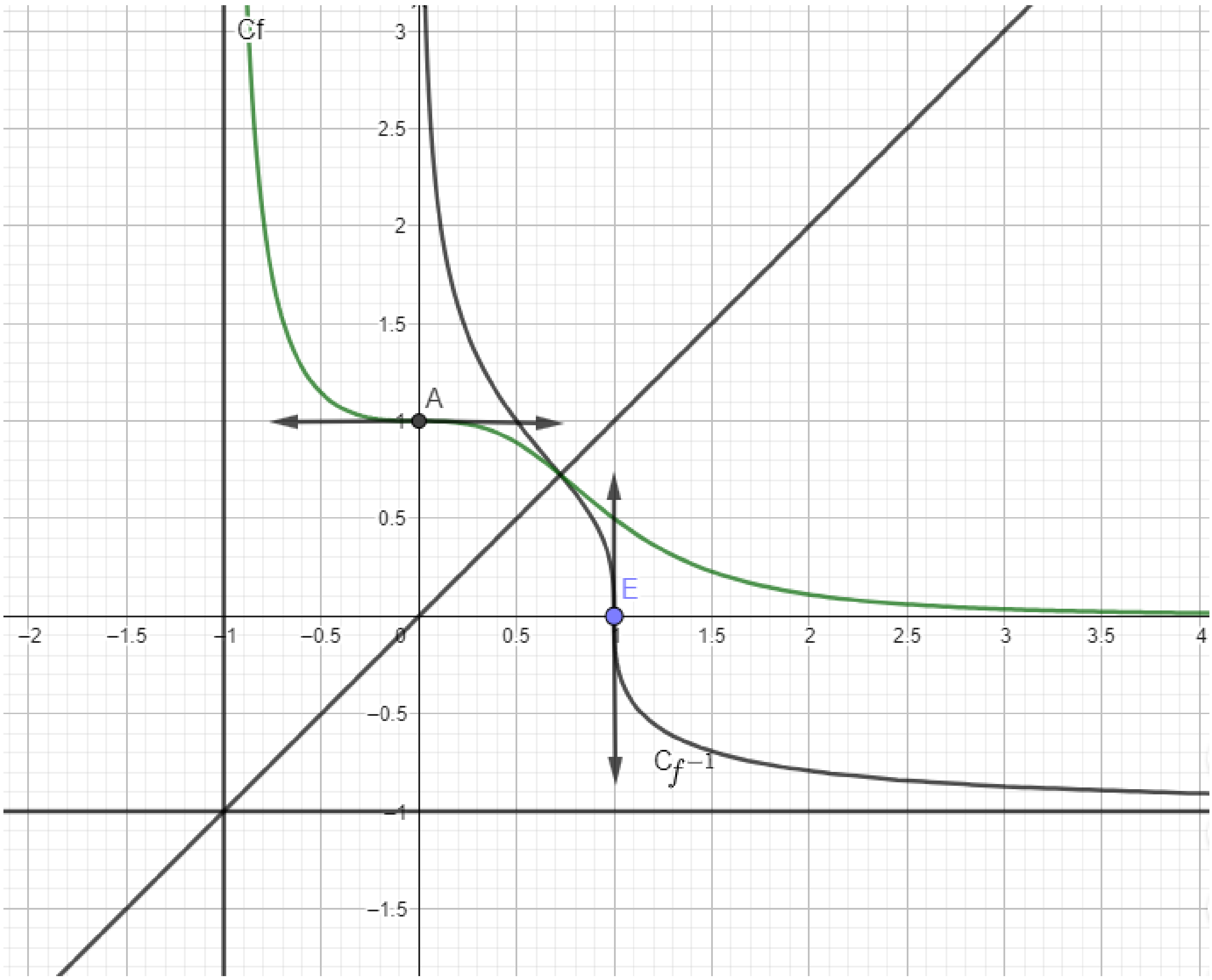
pour $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \frac{9}{10}$.

6) La courbe de f admet deux asymptotes une verticale d'équation $x = -1$ et une horizontale d'équation $y = 0$

Au voisinage de $+\infty$ et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 et deux points d'inflexion.

La courbe de f^{-1} est le symétrique de la courbe de f par rapport à la droite

d'équation $y = x$



7)a) Soit la propriété P_n: "$pour\ tout\ n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$"

Pour n=0 , $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$ donc P_0 est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

On a : $0 \leq u_n \leq 1$ et est continue et strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$

donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(0)$ alors

$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$ donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : $pour\ tout\ n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$

b) On a f est dérivable sur [0,1] et pour tout x de [0,1], $|f'(x)| \leq \frac{9}{10}$ alors d'prés le théorème des inégalités des accroissements finis pour tous réels a et b de [0,1] ,

$|f(a) - f(b)| \leq \frac{9}{10}|a - b|$.

$Pour\ tout\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$ et $\alpha \in [0,1]$ donc $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{9}{10}|u_n - \alpha|$ or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{9}{10}|u_n - \alpha|$.

c) Montrons par récurrence que pour $tout\ n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$

pour n=0 , $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{9}{10}\right)^0 \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$ c'est-à-dire $\left|\frac{1}{2} - \alpha\right| \leq \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$ donc la propriété est vraie pour n=0

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$ et montrons que

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$

On a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| \Leftrightarrow \frac{9}{10}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$

D'après 7)b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{9}{10}|u_n - \alpha|$ donc

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$

Conclusion : pour $tout\ n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$

d) On a : pour $tout\ n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| = 0$

car $\frac{9}{10} \in]-1,1[$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Exercice n°3)

1) $(E_\theta): z^2 - 2(i + cos\theta)z + 2icos\theta = 0$

$\Delta = 4(i + cos\theta)^2 - 8icos\theta = 4(-1 + 2icos\theta + cos^2\theta) - 8icos\theta = -4sin^2\theta = (2isin\theta)^2$

Donc $z' = \frac{2(i+cos\theta)+2isin\theta}{2} = i + e^{i\theta}$ et $z'' = \frac{2(i+cos\theta)-2isin\theta}{2} = i + e^{-i\theta}$

$S_{\mathbb{C}} = \{ i + e^{i\theta}, i + e^{-i\theta} \}$

2) a) $z_1 = i + e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\theta} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} \right)$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

Il faut étudier le signe de $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi\ \ , k \in \mathbb{Z}$

Or $\theta \in [0,2\pi[$ donc $\theta = \frac{3\pi}{2}$

θ	0	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$	$+$	0	$-$

Si $\theta \in [0,\frac{3\pi}{2}[$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) > 0$ donc $z_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$ est sous la forme exponentielle

Si $\theta = \frac{3\pi}{2}$ alors $z_1 = 0$ et par suite z_1 n'admet pas une forme exponentielle

Si $\theta \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) < 0$ alors $|z_1| = \left|2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right| = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

Alors $z_1 = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \times e^{-i\pi} = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}$

Donc $|z_1| = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(z_1) \equiv \frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

$$z_2 = i + e^{-i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\theta} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$

Il faut étudier le signe de $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}+2k\pi\ \ , k \in \mathbb{Z}$

Or $\theta \in [0,2\pi[$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	2π
$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$	$+$	0	$-$

Si $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}[$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) > 0$ donc $z_2 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$ est sous la forme exponentielle

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors $z_2 = 0$ et par suite z_2 n'admet pas une forme exponentielle

Si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, 2\pi[$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) < 0$ alors $|z_2| = \left|2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right| = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

Alors $z_2 = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} \times e^{-i\pi} = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(-\frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}$

Donc $|z_2| = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(z_2) \equiv -\frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

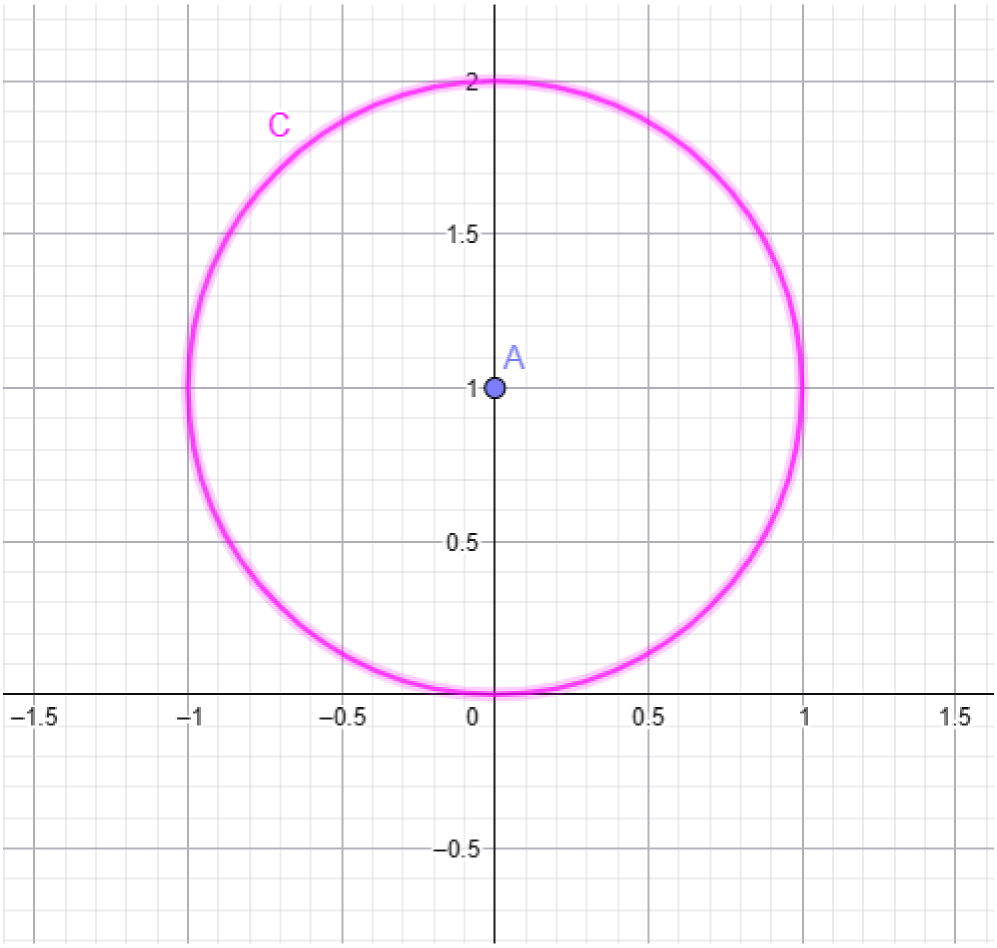
b) $z_1 = i + e^{i\theta} \Leftrightarrow z_1 - i = e^{i\theta} \Leftrightarrow |z_1 - i| = 1$ et $\arg(z_1) \equiv \theta[2\pi]$ $avec$ $\theta \in [0,2\pi[$

$\Leftrightarrow AM_1 = 1 \Leftrightarrow M_1 \in C_{(A,1)}$

$z_2 = i + e^{-i\theta} \Leftrightarrow z_2 - i = e^{-i\theta} \Leftrightarrow |z_2 - i| = 1 \quad et \ \arg(z_1) \equiv -\theta[2\pi] \ avec \ \theta \in [0,2\pi[$

$\Leftrightarrow AM_2 = 1 \Leftrightarrow M_2 \in C_{(A,1)}$

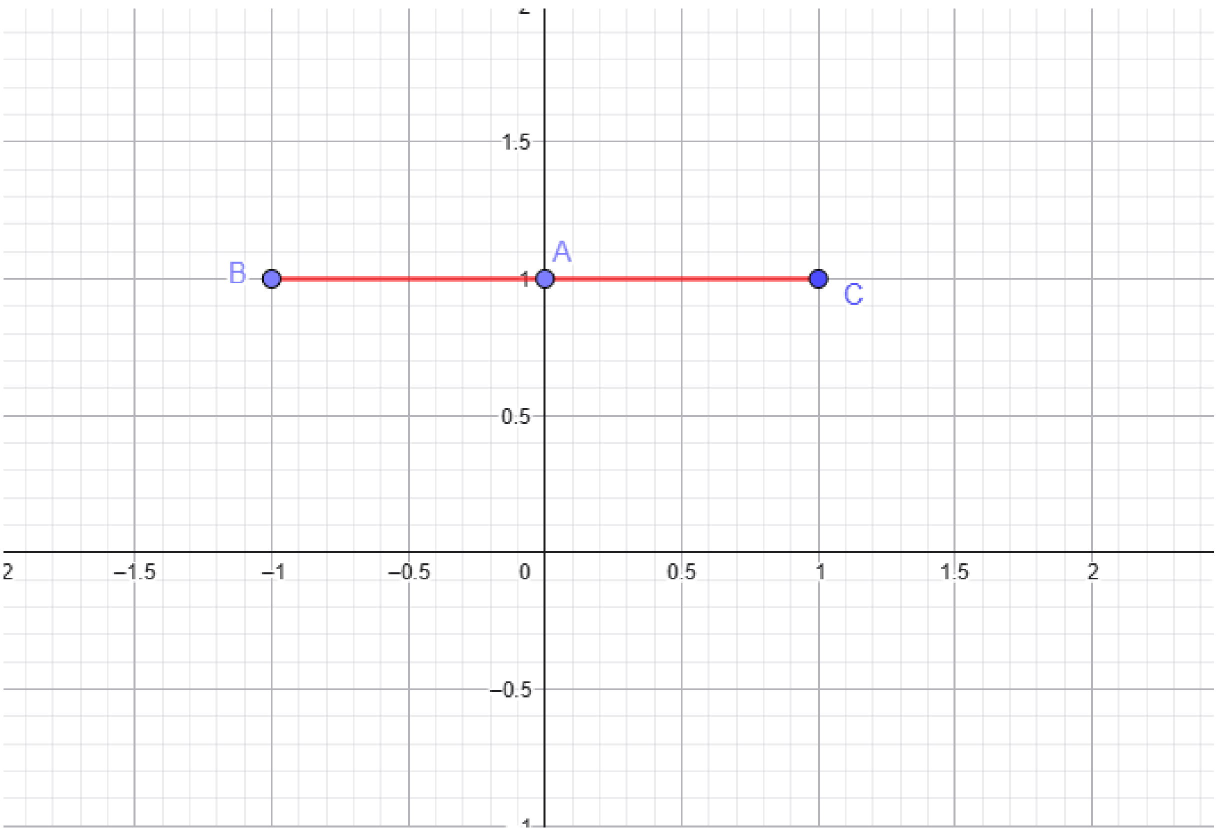
Donc l'ensemble des points $M_1 \ et \ M_2$ lorsque θ décrit l'intervalle $[0,2\pi[$ est le cercle de centre A et de rayon 1.



c) I est le milieu du segment $[M_1\ M_2]$ donc $z_I = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{i+e^{i\theta}+i+e^{-i\theta}}{2} = cos\theta + i$

D'où $I(cos\theta, 1)$ avec $\theta \in [0,2\pi[$ donc $I(x,1)$ avec $x \in [-1,1]$

Alors l'ensemble des points I lorsque θ décrit l'intervalle $[0,2\pi[$ est le segment [BC].



d) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|i + e^{i\theta} - i - e^{-i\theta}\right| = \left|e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right| = |2sin\theta| = 2|sin\theta|$

La distance M_1M_2 est maximale si $sin\theta = 1 \quad ou \quad sin\theta = -1$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ou \quad \theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}$

$et\ comme\ \theta \in [0,2\pi[$ alors $\theta = \frac{\pi}{2} \quad ou\ \theta = \frac{3\pi}{2}$

D'où les valeurs de θ pour que la distance M_1M_2 soit maximale sont $\frac{\pi}{2}\ \ et\ \frac{3\pi}{2}$.

Exerice n°4

1) La fonction $u: x \longmapsto \frac{\pi}{4}x$ est continue et strictement croissante sur $]0,2[$

Et $u(\quad]0,2[\quad) =]0,\frac{\pi}{2}[$ et la fonction $x \longmapsto tanx$ est continue et strictement positive sur $]0,2[$

Donc la fonction $g: x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}}$ est continue sur $]0,2[$

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}} = 0 = g(2)$ donc g est continue à gauche en 2

Conclusion : g est continue sur $]0,2]$

2) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} \times \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}}$

On pose $h = x-2 \Leftrightarrow x = h+2$

$x \longrightarrow 2^- \Leftrightarrow h \longrightarrow 0^-$

$D'o$ù $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{h\longrightarrow 0^-} \frac{1}{h} \times \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}h+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}h+\frac{\pi}{2}\right)}} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \times \sqrt{\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}h\right)}}$

$= \lim\limits_{h\to 0^-} -\frac{\tan(\frac{\pi}{4}h)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{-\tan\left(\frac{\pi}{4}h\right)}} = -\infty$

car $\lim\limits_{h\to 0^-} -\frac{\tan(\frac{\pi}{4}h)}{h} = -\frac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{-\tan\left(\frac{\pi}{4}h\right)}} = +\infty$

donc g n'est pas dérivable à gauche en 2 et C_g admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 2 à gauche en 2.

3) La fonction $u\colon x \longmapsto \frac{\pi}{4}x$ est dérivable sur $]0,2[$ et $u'(x) = \frac{\pi}{4} > 0$ donc u est strictement croissante alors $u($ $]0,2[$ $) =]0,\frac{\pi}{2}[$ et la fonction $x \longmapsto tanx$ est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et strictement positive donc $x \longmapsto \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ est dérivable sur $]0,2[$ et strictement positive alors la fonction g est dérivable sur $]0,2[$ et pour tout $x \in]0,2[$, $g'(x) = \frac{\frac{-\frac{\pi}{4}\left(1+tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}}}{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)} = \frac{-\pi\left(1+tan^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)}{8\sqrt{tan^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)}}$

4)Pour tout $x \in]0,2[$, $g'(x) = \frac{-\pi\left(1+tan^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)}{8\sqrt{tan^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)}} < 0$

Donc g est strictement décroissante sur $]0,2[$ et puisque g est continue sur $]0,2]$

alors g est strictement décroissante sur $]0,2]$.

g est continue et strictement décroissante sur $]0,2]$ donc elle réalise une bijection de $]0,2]$ sur $g(]0,2]) = [g(2), \lim_{0^+} g\,[$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{4}x = 0 \\ \lim_{x\to 0} tanx = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0 \quad \text{et} \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) > 0 \quad si \;\; x \in]0,2[$$

Alors $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}} = +\infty$

D'où $[g(2), \lim_{0^+} g\,[= [0, +\infty[$

En conclusion : g réalise une bijection de $]0,2]$ sur $g(]0,2]) = [0, +\infty[$

5) Dérivabilité de g^{-1} à droite en 0

On pose $x = g^{-1}(y)$, $x \in]0,2]$ et $y \in [0, +\infty[$

On a g est continue à gauche en 2 donc $\lim_{x\to 2^-} g(x) = g(2) = 0$

Donc $x \longrightarrow 2^- \Leftrightarrow g(x) \longrightarrow 0^+ \Leftrightarrow y \longrightarrow 0^+$

Alors $\lim_{y\longrightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(y)-g^{-1}(0)}{y-0} = \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x-2}{g(x)-g(2)} = \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{1}{\frac{g(x)-g(2)}{x-2}} = 0$ car

$\lim_{x\to 2^-} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = -\infty$

Alors g^{-1} est dérivable à en 0 et $(g^{-1})'(0) = 0$

Dérivabilité de g^{-1} sur $]0,+\infty[$

On a :

- g est une bijection de $]0,2]$ sur $]0,+\infty]$
- g est dérivable sur $]0,2[$ et pour tout x de $]0,2[$ $g'(x) \neq 0$

donc g^{-1} est dérivable sur $g(\ ]0,2[\ ) =]0,+\infty[$ et pour tout x de $]0,+\infty[$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(y)} \text{ avec } g^{-1}(x) = y$$

$$= \frac{1}{\frac{-\pi\left(1+tan^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)\right)}{8\sqrt{tan^3\left(\frac{\pi}{4}y\right)}}} = \frac{-8\sqrt{tan^3\left(\frac{\pi}{4}y\right)}}{\pi\left(1+tan^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)\right)}$$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}y\right)}} = x \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}y\right) = \frac{1}{x^2}$$

D'où $(g^{-1})'(x) = \dfrac{\frac{-8}{x^3}}{\pi\left(1+\frac{1}{x^4}\right)} = \dfrac{-8x}{\pi(1+x^4)}$

Conclusion :

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $(g^{-1})'(x) = \dfrac{-8x}{\pi(1+x^4)}$

6)a) $H(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

La fonction $v: x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $v(\ ]0,+\infty[\ ) =]0,+\infty[\subset [0,+\infty[$

et la fonction g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$

Donc $H = g^{-1} + g^{-1} \circ v$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $H'(x) = \left(g^{-1})'(x) - \frac{1}{x^2}(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{-8x}{\pi(1+x^4)} - \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{-8\times\frac{1}{x}}{\pi(1+(\frac{1}{x})^4)}$

$$= \frac{-8x}{\pi(1+x^4)} - \frac{-8x}{\pi(1+x^4)} = 0$$

b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $H'(x) = 0$ alors $H(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$

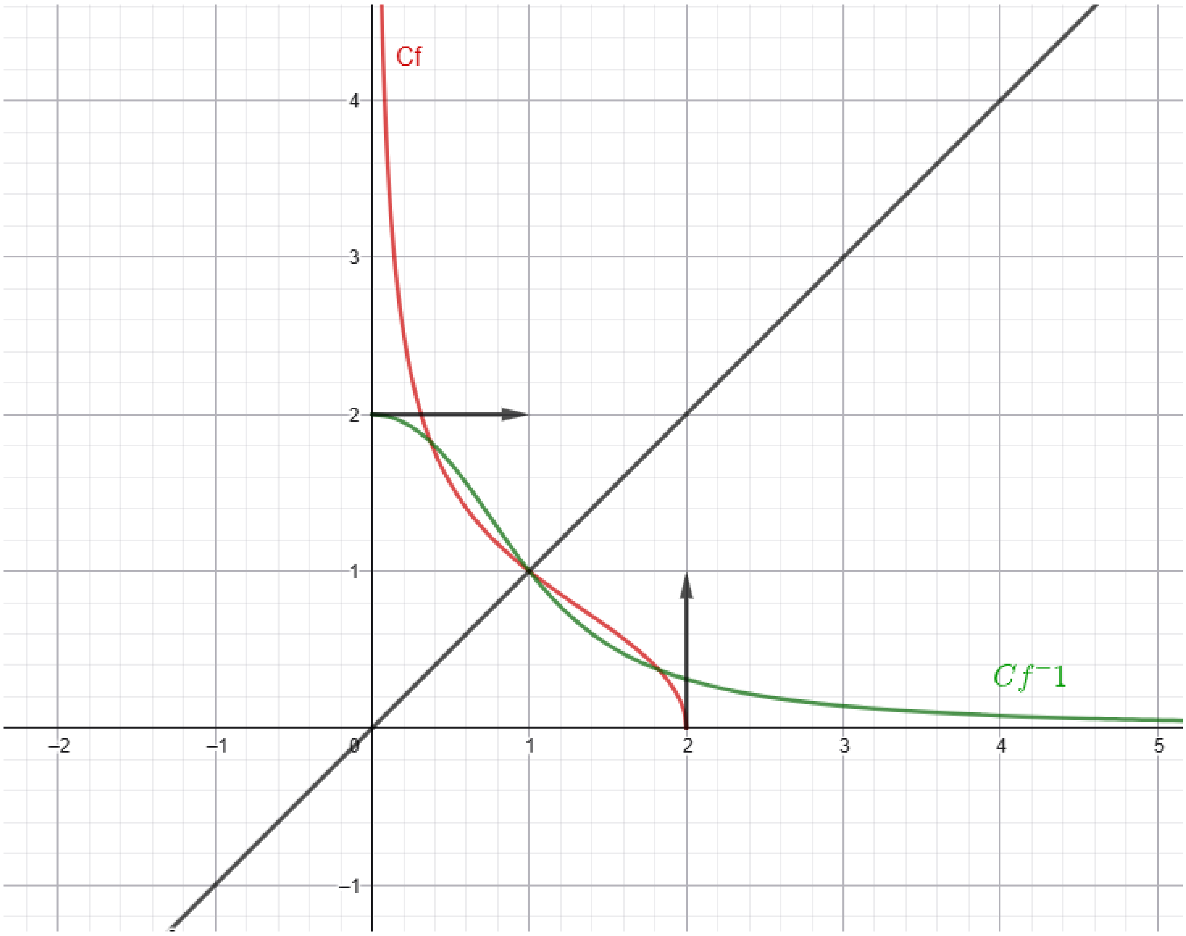
$H(1) = 2g^{-1}(1)$

Or $g(1) = \frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = 1 \Leftrightarrow g^{-1}(1) = 1$

Alors $H(1) = 2$ donc $c = 2$

D'où pour tout $x \in]0, +\infty[,\ H(x) = 2$

7)



8)a) $w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(g^{-1}(k) + g^{-1}\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)$

D'après 6)b) pour tout $x \in]0, +\infty[,\ g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g^{-1}(k) + g^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) = 2 \Leftrightarrow g^{-1}(k) = 2 - g^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)$

Alors $w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2 + g^{-1}\left(\frac{1}{k+1}\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)\right)$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2 + \sum_{k=1}^{n} g^{-1}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} g^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)$

$= \frac{1}{n} \times 2n + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} g^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n} g^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} g^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{n} g^{-1}(1)$

$$= 2 + \frac{1}{n} g^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n} g^{-1}(1)$$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (\,2 + \frac{1}{n} g^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n} g^{-1}(1))$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et g^{-1} est continue en 0 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = g^{-1}(0) = 2$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} g^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} g^{-1}(1) = 0$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (\,2 + \frac{1}{n} g^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n} g^{-1}(1)) = 2$