Devoir de synthèse n°1) **4 Maths**

Exercice n°1) (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct

On considère un triangle ABC isocèle en A et tel que$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

On désigne par I , J et K les milieux respectifs de [AB] , [AC] et [BC].

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que R(A)=C et R(I) = J

b) Montrer que R(B)=A.

c) Montrer que R est une rotation d'angle $-\frac{5\pi}{6}$ et construire son centre O.

2) Soit ζ le cercle circonscrit au triangle ABC et soit D = R(C).

Montrer que D appartient à ζ et que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

3) La parallèle à la droite (CD) passant par A recoupe le cercle ζ en E .

Montrer que R((BD))= (AE) . En déduire que R(D) = E .

4) a) Caractériser l'application $R \circ R$.

b) Soit M un point du segment [AC] et N le point du segment [DE] tel que AM = DN. Montrer que le triangle OMN est équilatéral.

5) Soit $f = R \circ S_{(AB)}$.

a)Montrer que f est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

b)Déterminer $f(I)$.

c) Soit $C' = f(C)$.

Montrer que le quadrilatère ABCC' est un parallélogramme.

Exercice n°2) (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[\ \ par\ \ f(x) = \frac{1}{x^3+1}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1)Dresser le tableau de variation de f.

2)Montrer que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera et expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

3) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

4)Soit $g(x) = f(x) - x\ ,\ x \in]-1,+\infty[$

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifier que $\alpha \in [0,1]$

5) a) Montrer que pour tout x de $]-1,+\infty[$, $f''(x)=\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$.

b) En déduire que la courbe C_f admet deux points d'inflexion que l'on déterminera.

c) Dresser le tableau de variation de f'. En déduire que pour tout x de l'intervalle [0,1] on a : $|f'(x)|\leq\frac{9}{10}$.

6) Tracer les courbes de $f\ et\ de\ f^{-1}$.

7) On définit la suite réelle u par : $u_0=\frac{1}{2}\quad et\ pour\ tout\ n\in\mathbb{N}\ ,u_{n+1}=f(u_n)$

a)Montrer que $tout\ n\in\mathbb{N}\ ,0\leq u_n\leq 1.$

b)Montrer que $tout\ n\in\mathbb{N}\ ,|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{9}{10}|u_n-\alpha|$

c) Démontrer que $tout\ n\in\mathbb{N}\ ,\ |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{9}{10}\right)^n\left|\frac{1}{2}-\alpha\right|$

d)En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Exercice n°3) (4 points)

Pour tout réel θ de l'intervalle $[0,2\pi[$ on considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta): z^2-2(i+cos\theta)z+2icos\theta=0$

1)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit A, B , C , $M_1\ et\ M_2$ les points d'affixes respectives i , $-1+i$, $1+i$,

$z_1=i+e^{i\theta}\ \ et\ \ z_2=i+e^{-i\theta}$.

a) En discutant suivant les valeurs de θ, mettre $z_1\ \ et\ \ z_2$ sous la forme exponentielle.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points $M_1\ et\ M_2$ lorsque θ décrit l'intervalle $[0,2\pi[$

c) Soit I le milieu du segment $[M_1\ M_2]$. Déterminer et construire l'ensemble des points I lorsque θ décrit l'intervalle $[0,2\pi[$.

d) Déterminer les valeurs de θ pour que la distance M_1M_2 soit maximale.

Exercice n°4) (5 points)

Soit g la fonction définie sur $]0,2]$

$par\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}}\ \ si\ x \in]0,2[\ \ et\ g(2) = 0.$

On désigne par C_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1)Montrer que g est continue sur$]0,2]$

2)Etudier la dérivabilité de g à gauche en 2. Interpréter le résultat graphiquement.

3)Montrer que g est dérivable sur $]0,2[$ et calculer $g'(x)$

4)Démontrer que g est une bijection de $]0,2]\ \ sur\ [0, +\infty[$

5) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout x de $[0, +\infty[$ on a : $(g^{-1})' = \frac{-8x}{\pi(1+x^4)}$

6) Soit H la fonction définie sur $]0, +\infty[\ \ par\ H(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Montrer que H est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer H'(x).

b) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[\ , H(x) = 2$

7) Tracer $C_g\ \ et\ C_{g^{-1}}$.

8) Soit $w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(g^{-1}(k) + g^{-1}\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)\ \ , n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 2 + \frac{1}{n}g^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n}g^{-1}(1)$

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$